Lineárne nerovnice, lineárna optimalizácia

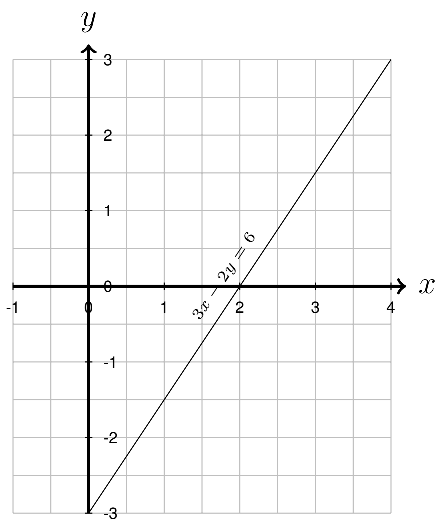
V tomto texte sa budeme zaoberať najskôr grafickým znázornením riešenia sústav lineárnych nerovníc a neskôr s tým súvisiacimi úlohami lineárnej optimalizácie.
Grafickým riešením lineárnej nerovnice s dvomi neznámymi je množina bodov $[x, y]$ v rovine, ktorých súradnice x a y vyhovujú príslušnej nerovnici. Keďže množina bodov $[x, y]$, ktoré vyhovujú príslušnej rovnici je priamka, tak nerovnici budú vyhovovať body v rovine, vytvárajúce polrovinu, ktorej hranica je práve táto priamka. Ukážeme si to na príklade, graficky vyriešime nerovnicu

$$3x - 2y \quad \leq 6$$

Je zrejmé, že príslušnej rovnici

$$3x - 2y \quad = 6$$

vyhovujú napríklad body $[2, 0]$ a $[0, -3]$, takže grafickým riešením rovnice je priamka, ktorá ich spája.

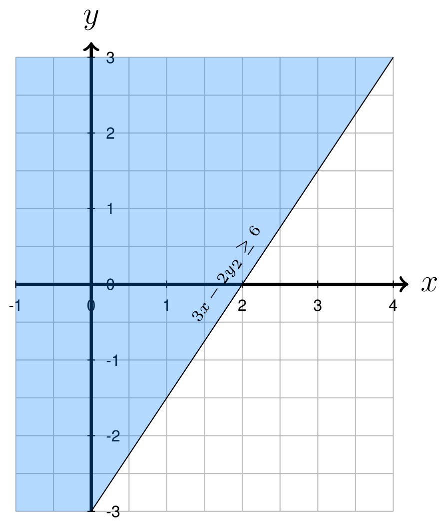


Riešením nerovnice potom bude polrovina s touto hraničnou priamkou. Ktorá z dvoch polrovín prichádzajúcich do úvahy to bude zistíme ľahko - dosadíme do nerovnice $3x-2y \leq 6$ ľubovoľný bod roviny o ktorom vieme, že neleží na hraničnej priamke. Ak nerovnica pre tento

bod platí, tak riešením je polrovina, ktorá ho obsahuje. V prípade, že pre tento bod daná nerovnica neplatí je riešením polrovina neobsahujúca tento bod.
Jednoduchým dosadením súradníc bodu $[0,0]$ do nerovnice

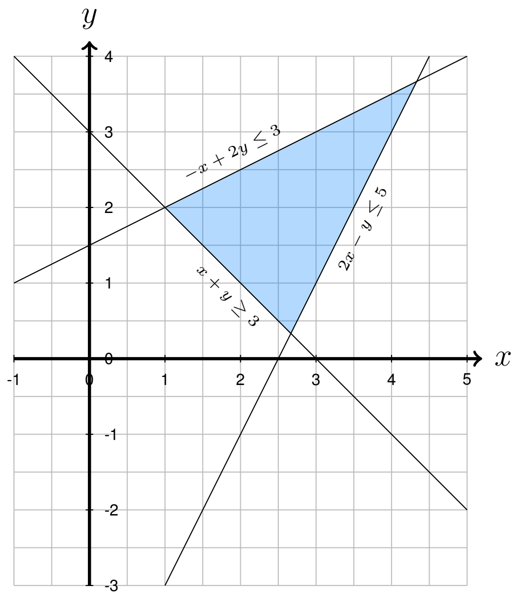
$$3x - 2y \quad \leq 6$$

zistíme, že tento bod vyhovuje. Vyhovuje teda aj celá polrovina, ktorá ho obsahuje. Je znázornená na obr. nižšie.



Ak máme teda riešiť sústavu nerovníc, tak výsledkom je prienik toľkých polrovín koľko nerovníc máme v sústave. Na nasledujúcom obrázku uvidíte grafické riešenie sústavy nerovníc

$$\begin{aligned} -x + 2y &\leq 3 \\ x + y &\geq 3 \\ 2x - y &\leq 5 \end{aligned}$$



To, ako sa nám zručnosti získané v grafickom riešení sústav lineárnych nerovníc zídu v riešení úloh lineárnej optimalizácie uvidíte na nasledovnom príklade.

Príklad: Pri výskume rozvoja živočíšnej výroby sa zistilo, že výkrm jatočných zvierat je veľmi výhodný, ak v denných dávkach bude každé zviera dostávať nie menej ako 6 jednotiek živín A, minimálne 12 jednotiek živín B a nie menej ako 4 jednotky živín C. Na výkrm sa používajú dva druhy krmív K_1 a K_2, pričom jeden kilogram krmivaK_1obsahuje 2 jednotky živiny A, 2 jednotky živiny B a žiadnu jednotku živiny C a jeden kilogram krmiva K_2 obsahuje 1 jednotku živiny A, 4 jednotky živiny B a 4 jednotky živiny C. Ďalej vieme, že za 1kg krmiva K_1 sa platí 0,50eur a za 1kg krmiva K_2 sa platí 0,60eur. Ako treba podávať krmivá jatočným zvieratám, teda aké množstvo kilogramov K_1 a K_2 dať jednému zvieraťu, aby náklady na výkrm boli minimálne?

Riešenie: Nech x je počet kilogramov krmiva K_1 a y je počet kilogramov krmiva K_2, ktoré treba podať jednotlivému zvieraťu. Zviera dostane nie menej ako 6 jednotiek živín A práve vtedy, keď platí nerovnica

$$2x + y \quad \geq 6$$

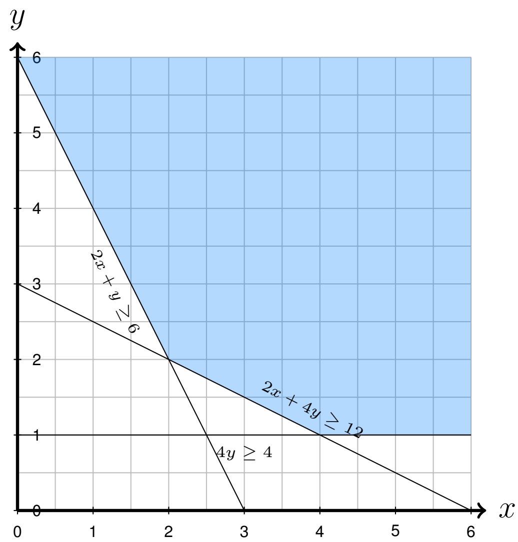
Ďalšie dve podmienky na živiny B a C sú úplne analogicky opísané ďalšími dvomi nerovnicami:

$$\begin{aligned} 2x + 4y &\geq 12 \\ 4y &\geq 4 \end{aligned}$$

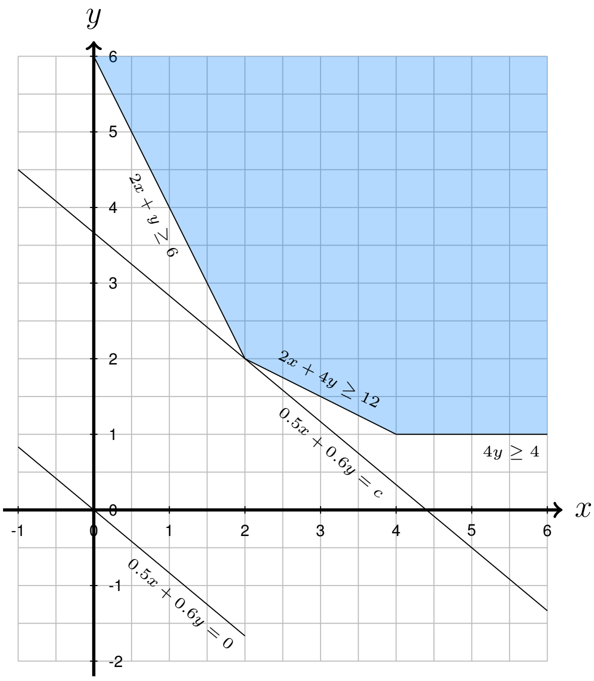
A na záver si treba uvedomiť, že pracujeme v prvom kvadrante, pretože kupujeme nezáporné množstvá kilogramov, takže platia aj vzťahy:

$$\begin{aligned} x &\geq 0 \\ y &\geq 0 \end{aligned}$$

Tri podmienky na živiny teda znázorníme graficky v prvom kvadrante, dostávame obrázok:



Vyfarbená časť prvého kvadrantu je množina bodov, ktorých súradnice $[x, y]$ vyhovujú podmienkam výživy zvieraťa. Pokračuje ďalej v smere osi x a v smere osi y do nekonečna a nazýva sa množinou **prípustných riešení**. Nás ale ďalej zaujíma, v ktorom z týchto prípustných riešení je minimálna cena nákupu x kilogramov krmiva K_1 a y kilogramov krmiva K_2. A preto si musíme uvedomiť, že je potrebné minimalizovať výraz $0,5x + 0,6y$. Najmenšia hodnota spomínaného výrazu by sa nadobudla pre $x = y = 0$. Vtedy by sme zaplatili 0 eur. Ak však budeme obraz priamky, ktorej rovnica je $0,5x + 0,6y = 0$ rovnobežne posúvať smerom k vyšším hodnotám x a y tak časom narazíme na množinu prípustných riešení. Prvý taký bod, ktorý patrí posunutej priamke aj množine prípustných riešení je riešením našej úlohy. Stačí si prečítať z grafu jeho súradnice - x bude počet kilogramov krmiva K_1 a y bude počet kilogramov krmiva K_2. Treba však na záver podotknúť, že posúvaním priamky sa môžeme naraz dostať do množiny prípustných riešení v nekonečne veľa bodoch - to vtedy, keď posúvaná priamka je rovnobežná s niektorou priamkou ohraničujúcou množinu prípustných riešení. Vtedy má pôvodná úloha nekonečne veľa riešení. Na obrázku, ktorý nasleduje je znázornená priamka $0,5x + 0,6y = 0$ a taktiež jej posunutie na hranicu prípustných riešení, ktorým sa dostávame k riešeniu našej úlohy. Je ním jediný bod so súradnicami $[2, 2]$. Takže pre jedno zviera je potrebné kúpiť 2kilogramy prvého krmiva a 2 kilogramy druhého krmiva.



Na záver tohoto učebného textu je potrebné sa zmieniť o tom, že ilustrovanou metódou lineárnej optimalizácie možno riešiť aj úlohy, v ktorých sa vyskytuje problém maximalizovať istú hodnotu. Tak ako sme doteraz v úlohe minimalizovali svoje náklady, tak budeme v inej úlohe možno maximalizovať svoj zisk. Ako príklad uvedieme nasledovný problém, ktorý môžete vyriešiť v rámci samostatného cvičenia. Problém: V závode sa na výrobe dvoch druhov výrobkov podieľajú 4 stroje. Denné výrobné možnosti jednotlivých strojov v hodinách sú: 1. stroj najviac 12 hodín, 2. stroj najviac 8 hodín, tretí stroj najviac 16 hodín, 4. stroj najviac 12 hodín. Presný čas, ktorý strávi prvý výrobok na 1. stroji je 2 hodiny, na druhom 1 hodinu, na treťom stroji 4 hodiny a na štvrtý stroj nejde. Presný čas, ktorý strávi druhý výrobok na 1. stroji je 2 hodiny, na druhom tiež 2 hodiny, na tretí stroj nejde a na štvrtom stroji strávi 4 hodiny. Zisk z predaja prvého výrobku je 200 eur, z predaja druhého výrobku 300 eur. Zostavte denný výrobný plán tak, aby ste maximalizovali celkový zisk z predaja.